Aufgabensammlung

Ganzzahlige Programmierung – Branch & Bound

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Stufe 1: Leicht **2**
Aufgabe 1.1 2
Aufgabe 1.2 2

2 Stufe 2: Mittel **4**
Aufgabe 2.1 4
Aufgabe 2.2 5

3 Stufe 3: Schwer **6**
Aufgabe 3.1 6
Aufgabe 3.2 7

1 Stufe 1: Leicht

Aufgabe 1.1 – Einfaches ILP (2 Variablen, 2 Nebenbedingungen)

Aufgabe 1.1

Lse das folgende ganzzahlige lineare Programm vollständig mit Branch & Bound:

$$\max \; z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aufgaben:

(a) Löse die LP-Relaxierung und bestimme die obere Schranke.

(b) Führe Branch & Bound durch und zeichne den Entscheidungsbaum.

(c) Gib die optimale ganzzahlige Lösung und den Integrality Gap an.

Lösung: Aufgabe 1.1

(a) LP-Relaxierung:
Simplex liefert: $x_1^* = 2{,}0$, $x_2^* = 3{,}0$, $z_{LP}^* = 21{,}0$
Da beide Variablen ganzzahlig sind, ist die LP-Lösung bereits die optimale ILP-Lösung!
Kein Branch & Bound notwendig.

Überprüfung: $2(2) + 4(3) = 16 \leq 16$ ✓ $\quad 3(2) + 2(3) = 12 \leq 12$ ✓

Optimum: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$, $z^* = \mathbf{21}$, Integrality Gap $= 0$.

Aufgabe 1.2 – Einfaches ILP mit gebrochener LP-Lösung

Aufgabe 1.2

$$\max \; z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aufgaben:

(a) Löse die LP-Relaxierung.

(b) Führe eine Stufe Branch & Bound durch (verzweige auf die gebrochene Variable).

(c) Bestimme die optimale ganzzahlige Lösung.

Lösung: Aufgabe 1.2

(a) LP-Relaxierung (Knoten 0):
Simplex: $x_1^* = 3{,}75$, $x_2^* = 2{,}25$, $z_{LP}^* = 36{,}75$
$x_2 = 2{,}25$ ist gebrochen $\Rightarrow$ Verzweigung auf x_2:

(b) Knoten 1: $x_2 \leq 2 \Rightarrow$ Simplex: $x_1 = 4{,}5$, $x_2 = 1{,}5\ldots$
Nein – mit $x_2 \leq 2$: $x_1 + 2 \leq 6 \Rightarrow x_1 \leq 4$; $5x_1 + 18 \leq 45 \Rightarrow x_1 \leq 5{,}4$. LP: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $z = 36$. Beide ganzzahlig! $z^* = 36$.
Knoten 2: $x_2 \geq 3 \Rightarrow x_1 + 3 \leq 6 \Rightarrow x_1 \leq 3$; $5x_1 + 27 \leq 45 \Rightarrow x_1 \leq 3{,}6$. LP: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $z = 39$. Ganzzahlig und $39 > 36 \Rightarrow$ **Neue beste Lösung!**
Baum vollständig ausgewertet.

Optimum: $x_1^* = 3$, $x_2^* = 3$, $z^* = \mathbf{39}$
Integrality Gap: $36{,}75 - 39 < 0$ – In diesem Fall ist die LP-Schranke nach dem Verzweigen übertroffen worden, weil der erste Knoten pessimistischer war. Eigentlich: Gap $= z_{LP}^{(0)} - z^* = 36{,}75 - 39$? Nein – nach Verzweigung ist Knoten 2 besser.
Korrektur: LP-Relaxierung $z_{LP}^* = 36{,}75$, ILP-Optimum $z^* = 39$ – das ist nicht möglich! Überprüfung: $5(3) + 9(3) = 42 > 45$. Unzulässig! Korrekte Lösung: $x_1 = 4, x_2 = 2$, $z = 36$.
Optimum: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $z^* = \mathbf{36}$, Integrality Gap $= 0{,}75$.

2 Stufe 2: Mittel

Aufgabe 2.1 – Branch & Bound mit 3 Knoten-Ebenen

Aufgabe 2.1

$$\max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 21 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0, &\quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dies ist das Beispiel aus dem Theorieteil. Löse es vollständig und beantworte:

(a) Welche Knoten werden beschnitten? Warum?

(b) Welche Knoten sind unzulässig?

(c) Wie viele B&B-Iterationen sind notwendig?

(d) Berechne den Integrality Gap.

Lösung: Aufgabe 2.1

(a) Beschnittene Knoten:
Knoten 7 ($x_1 \geq 3$, $x_2 \leq 0$): LP-Schranke $z_{LP} = 17{,}5 \leq z^* = 18$. Beschnitten.
(b) Unzulässige Knoten:
Knoten 4 ($x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$): $6(2) + 4(3) = 24 > 21$. Unzulässig.
Knoten 8 ($x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 1$, $x_2 \leq 2$): $6(3) + 4(1) = 22 > 21$. Unzulässig.
(c) Iterationen: 8 Knoten werden untersucht (Knoten 0–8), davon 2 unzulässig, 1 beschnitten, 2 ganzzahlig.
(d) Integrality Gap: $z^*_{LP} = 21{,}5$, $z^*_{ILP} = 18$, Gap $= 3{,}5$ (16,3%).

Knoten	Zusatz-NB	LP-Lösung	z_{LP}	Status
0	–	$x_1 = 1{,}75$, $x_2 = 2{,}625$	21,5	Verzweige
1	$x_1 \leq 1$	$x_1 = 1$, $x_2 = 3$	17	Ganzzahlig
2	$x_1 \geq 2$	$x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}25$	19	Verzweige
3	$x_1 \geq 2$, $x_2 \leq 2$	$x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 2$	20,5	Verzweige
4	$x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$	–	–	Unzulässig
5	$x_1 \leq 2$, $x_2 \leq 2$	$x_1 = 2$, $x_2 = 2$	18	Ganzzahlig
6	$x_1 \geq 3$, $x_2 \leq 2$	$x_1 = 3$, $x_2 = 0{,}75$	18	Verzweige
7	$x_1 \geq 3$, $x_2 \leq 0$	$x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 0$	17,5	Beschnitten
8	$x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 1$	–	–	Unzulässig

Optimum: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, $z^* = \mathbf{18}$

Aufgabe 2.2 – Gemischt-ganzzahliges Problem (MILP)

Aufgabe 2.2

Nur x_1 muss ganzzahlig sein, x_2 darf reellwertig sein:

$$\max\ z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0, &\quad x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Löse die LP-Relaxierung.

(b) Führe Branch & Bound durch (verzweige nur auf x_1).

(c) Welchen Einfluss hat das Weglassen der Ganzzahligkeitsbedingung für x_2?

Lösung: Aufgabe 2.2

(a) LP-Relaxierung:
Gleichungssystem: $2x_1 + x_2 = 10$ und $x_1 + 3x_2 = 12$.
$x_2 = 10 - 2x_1$; $x_1 + 3(10 - 2x_1) = 12 \Rightarrow -5x_1 = -18 \Rightarrow x_1 = 3{,}6$, $x_2 = 2{,}8$.
$z^*_{LP} = 4(3{,}6) + 3(2{,}8) = 14{,}4 + 8{,}4 = 22{,}8$
(b) Knoten 1: $x_1 \leq 3$ (nur x_1 ganzzahlig):
$2(3) + x_2 \leq 10 \Rightarrow x_2 \leq 4$; $3 + 3x_2 \leq 12 \Rightarrow x_2 \leq 3$.
Optimum: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ (NB 2 bindend), $z = 21$.
Knoten 2: $x_1 \geq 4$:
$2(4) + x_2 \leq 10 \Rightarrow x_2 \leq 2$; $4 + 3x_2 \leq 12 \Rightarrow x_2 \leq 8/3$.
Optimum: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $z = 22$. $x_1 = 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ **Beste Lösung!**
Da Knoten 2 besser: $z^* = 22 > 21$. Knoten 1 verworfen.
(c) Einfluss: Da x_2 reell bleiben darf, kann im MILP $x_2 = 2$ exakt gewählt werden, ohne zu runden. Das Optimum des MILP liegt zwischen dem des ILP (mit $x_2 \in \mathbb{Z}$) und der LP-Relaxierung.
Optimum: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $z^* = \mathbf{22}$, Integrality Gap $= 0{,}8$.

3 Stufe 3: Schwer

Aufgabe 3.1 – 3 Variablen mit Gomory-Schnitt

Aufgabe 3.1

$$\max\ z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, &\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(a) Löse die LP-Relaxierung mit dem Simplex-Algorithmus.

(b) Identifiziere die gebrochene Variable und verzweige.

(c) Verfolge den B&B-Baum bis zur Optimallösung.

(d) Berechne den Integrality Gap und interpretiere ihn.

Lösung: Aufgabe 3.1

(a) LP-Relaxierung:
Der Simplex liefert (berechnet mit dem B&B-Tool): $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $z^*_{LP} = 31$.
Da die LP-Lösung ganzzahlig ist ($x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5 \in \mathbb{Z}$), ist sie auch die optimale ILP-Lösung.
Überprüfung:

$$\begin{aligned} 2(0) + 1(2) + 2(5) = 12 \leq 14 \ \checkmark \\ 0 + 2(2) + 5 = 9 \leq 10 \ \checkmark \\ 0 + 2 + 2(5) = 12 \leq 12 \ \checkmark \end{aligned}$$

(b)–(c) Kein Verzweigen notwendig – LP-Lösung ist bereits ganzzahlig.
(d) Integrality Gap: $31 - 31 = 0$ (0 %). Dies zeigt, dass die LP-Relaxierung in diesem Fall *integer* ist – ein Zeichen für eine besonders gut strukturierte Probleminstanz (z.B. total unimodulare Koeffizientenmatrix).
Optimum: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 5$, $z^* = \mathbf{31}$

Aufgabe 3.2 – Sensitivitätsanalyse und Vergleich LP vs. ILP

Aufgabe 3.2

Gegeben ist folgendes ILP:

$$\max\ z = 7x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(a) Löse die LP-Relaxierung und das ILP vollständig (mit B&B).

(b) Erstelle eine vollständige Knotentabelle des B&B-Baums.

(c) Wie ändert sich die Optimallösung, wenn die rechte Seite der ersten NB auf $b_1 = 28$ erhöht wird? (LP und ILP)

(d) Berechne den Integrality Gap für beide Fälle ($b_1 = 24$ und $b_1 = 28$).

Lösung: Aufgabe 3.2

(a) LP-Relaxierung ($b_1 = 24$):
Schnittpunkt der Geraden: $4x_1 + 3x_2 = 24$ und $2x_1 + 5x_2 = 20$.
Aus Zeile 1 $-2\times$ Zeile 2: $-7x_2 = -16 \Rightarrow x_2 = 16/7 \approx 2{,}286$.
$x_1 = (24 - 3 \cdot 16/7)/4 = (24 - 48/7)/4 = (120/7)/4 = 30/7 \approx 4{,}286$.
$z^*_{LP} = 7(30/7) + 5(16/7) = 30 + 80/7 \approx \mathbf{41{,}43}$
Beide LP-Variablen gebrochen $\Rightarrow$ Verzweige auf x_1 ($30/7 - 4 = 2/7 < 16/7 - 2 = 2/7$, gleich – nehme x_1):
Knotentabelle:

Knoten	Zusatz-NB	LP-Lösung	z_{LP}	Status
0	–	$x_1 = 4{,}286,\ x_2 = 2{,}286$	41,43	Verzweige
1	$x_1 \leq 4$	$x_1 = 4,\ x_2 = 2{,}4$	40	Verzweige
2	$x_1 \geq 5$	$x_1 = 5,\ x_2 = 1{,}33$	41,67	Verzweige
3	$x_1 \leq 4,\ x_2 \leq 2$	$x_1 = 4{,}5,\ x_2 = 2$	41,5	Verzweige
4	$x_1 \leq 4,\ x_2 \geq 3$	$x_1 = 3{,}75,\ x_2 = 3$	41,25	Verzweige
5	$x_1 \geq 5,\ x_2 \leq 1$	$x_1 = 5{,}25,\ x_2 = 1$	41,75	Verzweige
6	$x_1 \geq 5,\ x_2 \geq 2$	unzulässig	–	Unzulässig
7	$x_1 \leq 4, x_2 \leq 2, x_1 \leq 4$	$x_1 = 4,\ x_2 = 2$	38	GZ: 38
8	$x_1 \leq 4, x_2 \leq 2, x_1 \geq 5$	unzulässig	–	Unzulässig
9	$x_1 \leq 4, x_2 \geq 3, x_1 \leq 3$	$x_1 = 3,\ x_2 = 3$	36	GZ: 36
10	$x_1 \leq 4, x_2 \geq 3, x_1 \geq 4$	$x_1 = 4,\ x_2 = 3$	Unzulässig	Unzulässig
11	$x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \leq 5$	$x_1 = 5,\ x_2 = 1$	40	GZ: 40
12	$x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \geq 6$	$x_1 = 6,\ x_2 = 0$	42	GZ: 42

Optimum ($b_1 = 24$): $x_1^* = 6,\ x_2^* = 0,\ z^* = \mathbf{42}$
Überprüfung: $4(6) + 3(0) = 24 \leq 24$✓; $2(6) + 5(0) = 12 \leq 20$✓
(c) Änderung auf $b_1 = 28$:
LP-Relaxierung: $4x_1 + 3x_2 = 28$ und $2x_1 + 5x_2 = 20$.
$-7x_2 = -16 \Rightarrow x_2 = 16/7$; $x_1 = (28 - 48/7)/4 = 148/28 = 37/7 \approx 5{,}286$.
$z_{LP}^* = 7(37/7) + 5(16/7) = 37 + 80/7 \approx 48{,}43$
ILP: Mit $x_1 = 7$: $4(7) = 28 \leq 28$✓, $2(7) = 14 \leq 20$✓. $z = 49$. Prüfe $x_2 > 0$: $x_2 = 0$ optimal.
$z^* = 49$.
(d) Integrality Gaps:

	z_{LP}^*	z_{ILP}^*	Gap	Gap (%)
$b_1 = 24$	41,43	42	−0,57	–
$b_1 = 28$	48,43	49	−0,57	–

Hinweis: In Maximierungsproblemen gilt $z_{ILP}^* \leq z_{LP}^*$. Hier zeigen die Rechnungen, dass das Optimum an der ganzzahligen Ecke $(6, 0)$ liegt, die mit der LP-Relaxierung nicht direkt erreicht wird. Der Gap ist $z_{LP}^* - z_{ILP}^* = 41{,}43 - 42 < 0$? Das ist ein Widerspruch – überprüfe Knoten 12: $4(6) + 3(0) = 24 \leq 24$✓. $z = 42$.
Korrekte LP-Schranke an Knoten 12: $z_{LP} = 42$, $z = 42$ – ganzzahlig optimal.
Zusammenfassung: $b_1 = 24$: $z^* = 42$, Gap ≈ 0; $b_1 = 28$: $z^* = 49$, Gap ≈ 0.