Vierdimensionaler Input-Output-Rechner

Aufgabensammlung in drei Schwierigkeitsgraden

mit Lösungen

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

5. November 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Hinweise **2**

2 Schwierigkeitsgrad 1 — Grundlagen **3**

3 Schwierigkeitsgrad 2 — Anwendung **4**

4 Schwierigkeitsgrad 3 — Komplexe Aufgaben **6**

A Lösungen **8**

Literatur **9**

1 Hinweise

Die folgenden Aufgaben sind den fünf Reitern des Input-Output-Rechners zugeordnet und decken das vierdimensionale Modell (Reiter 1), die Modelle M1–M9 (Reiter 2), Teil-Input-Output-Tabellen (Reiter 3), Make-Use-Matrizen (Reiter 4) sowie die Naturalwert-Verflechtungsbilanz (Reiter 5) ab. Die Lösungen befinden sich im Anhang; sie wurden numerisch gegen die Tool-Logik geprüft.

Kontrolle im Rechner:

- Reiter 1: Anzahl Güter n und Bereiche m festlegen, *Tabellen erzeugen*, Vorleistungsmatrix und Endnachfrage eingeben (oder als CSV laden), *Berechnen*. Die Kombinationsindizes sind nach Bereichen sortiert: G1-B1, G2-B1, …, Gn-B1, G1-B2, … (B = Bereich).
- Preise werden je Gut *und* Bereich eingegeben (p_{ik}, Felder G1-B1, G2-B1, …); ein Gut kann in verschiedenen Bereichen unterschiedliche Preise haben.
- Die Reiter 2 und 3 verwenden die in Reiter 1 berechneten Daten; Reiter 4 und Reiter 5 haben eine eigene Eingabe (Reiter 5 kann die Daten aus Reiter 1 übernehmen).
- Eigene Ergebnisse lassen sich in Reiter 1 mit *Aktuelles Ergebnis in Datenbox speichern* sichern.

2 Schwierigkeitsgrad 1 — Grundlagen

Aufgabe

Aufgabe 1.1 (Reiter 1 — Bruttoproduktion)

Ein Gut wird in einem Bereich mit folgenden Vorleistungslieferungen an vier Verwendungen produziert: 10, 5, 3, 2. Die Endnachfrage beträgt $Y = 15$. Berechnen Sie die Bruttoproduktion X.

Aufgabe

Aufgabe 1.2 (Reiter 1 — Inputkoeffizient)

Die Lieferung $X_{ijkl} = 12$ dient der Produktion einer Verwendung mit Bruttoproduktion $X_{jl} = 60$. Berechnen Sie den Inputkoeffizienten a_{ijkl}.

Aufgabe

Aufgabe 1.3 (Reiter 2 — Zuordnung der Modelle)

Ordnen Sie die Modelle M1, M5 und M9 jeweils der richtigen Kombination aus Input- und Outputseite zu (beide Merkmale / nur Gut / nur Bereich). Welche dieser Modelle sind quadratisch und damit eindeutig lösbar, und welche Dimension haben sie?

Aufgabe

Aufgabe 1.4 (Reiter 4 — Marktanteilsmatrix)

Ein Bereich k produziert die Güter 1, 2, 3 mit den Mengen $50, 3, 2$. Die (gegebenen) Güter-Outputs sind $x = (60,\ 20,\ 10)$. Berechnen Sie die zugehörige Zeile der Marktanteilsmatrix D ($D_{ki} = V_{ki}/x_i$).

Aufgabe

Aufgabe 1.5 (Reiter 5 — Restproduktion, Begriff)

Erläutern Sie in eigenen Worten, was die Restproduktionsspalte in Tabelle A der Naturalwert-Verflechtungsbilanz darstellt und warum sie benötigt wird.

3 Schwierigkeitsgrad 2 — Anwendung

Aufgabe

Aufgabe 2.1 (Reiter 1 — Leontief-Inverse, 2×2)

Gegeben sei die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}30 \end{pmatrix}$$

und die Endnachfrage $Y = (100,\ 80)^\top$. Berechnen Sie die Leontief-Inverse $L = (I - A)^{-1}$ und die Bruttoproduktion $X = LY$.

Aufgabe

Aufgabe 2.2 (Reiter 2 — Modell M4)

Gegeben ist die Vorleistungsmatrix (2 Güter, 2 Bereiche, kombinierter Index G1-B1, G2-B1, G1-B2, G2-B2):

$$Z = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 12 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Bilden Sie die (noch nicht durch X geteilte) Zählermatrix von Modell M4, das heißt: summieren Sie jeweils über den Bereichsindex k auf der Inputseite.

Aufgabe

Aufgabe 2.3 (Reiter 3 — Modifizierte Endnachfrage)

Eine Zeile $(i, k) \in N_1$ hat die ursprüngliche Endnachfrage $Y = 50$ und liefert zusätzlich 6 bzw. 4 Einheiten an zwei Verwendungen, die zu N_2 gehören. Berechnen Sie Y^*.

Aufgabe

Aufgabe 2.4 (Reiter 4 — Industrie-Technologie)

Gegeben seien

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}40 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die güterbezogene Koeffizientenmatrix $A_{ii} = B\,D$ unter der Industrie-Technologie-Annahme.

Aufgabe

Aufgabe 2.5 (Reiter 5 — Restproduktionsspalte berechnen)

Eine N_1-Zeile liefert an die zwei Güter der Gruppe N_2 in Bereich $l = 1$ die Mengen 4 und 7. Berechnen Sie die Restproduktion $\text{Restpro}_{ik,1}$ für diesen Bereich.

Aufgabe

Aufgabe 2.6 (Reiter 1 — Preisbewertung je Gut und Bereich)

Der Inputkoeffizient einer Lieferung von Gut i aus Bereich k an die Verwendung (j,l) beträgt $a_{ijkl} = 0{,}20$. Die Preise sind $p_{ik} = 2$ für das liefernde Gut (aus Bereich k) und $p_{jl} = 1{,}6$ für das empfangende Gut (in Bereich l). Berechnen Sie den wertmäßigen Koeffizienten $a^{p}_{ijkl} = a_{ijkl}\, p_{ik}/p_{jl}$. Wie verändert sich das Ergebnis, wenn dasselbe Gut i aus einem anderen Bereich k' zum Preis $p_{ik'} = 1{,}6$ geliefert wird?

4 Schwierigkeitsgrad 3 — Komplexe Aufgaben

Aufgabe

Aufgabe 3.1 (Reiter 1 — Vollständiges Modell)

Gegeben sei für $n = 3$ Güter, $m = 2$ Bereiche (kombinierter Index G1-B1, G2-B1, G3-B1, G1-B2, G2-B2, G3-B2):

$$Z = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 & 8 & 4 & 3 \\ 8 & 20 & 6 & 4 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 12 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 25 & 10 & 4 \\ 3 & 8 & 4 & 7 & 28 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 18 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 70 \\ 80 \\ 95 \\ 105 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Bruttoproduktion X, den Inputkoeffizienten a_{1111} sowie (mit Hilfsmitteln Ihrer Wahl, z. B. dem Rechner) die Leontief-Inverse L. Prüfen Sie $X = LY$.

Aufgabe

Aufgabe 3.2 (Reiter 3 — Teiltabelle mit Preisbewertung)

Verwenden Sie die Daten aus Aufgabe 3.1. Bilden Sie die Teiltabelle für $N_1 = \{G1, G3\}$ ($N_2 = \{G2\}$) und berechnen Sie Y^* für alle vier Zeilen von N_1. Bewerten Sie anschließend Y^* mit den Preisen je Gut und Bereich

G1-B1	G2-B1	G3-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2
1	1	2	1	1	2,5

(Gut G3 ist teurer, und zwar in Bereich 2 teurer als in Bereich 1).

Aufgabe

Aufgabe 3.3 (Reiter 4 — Technologie-Annahmen im Vergleich)

Gegeben seien die Make-Matrix V (Bereich × Gut) und die Use-Matrix U (Gut × Bereich):

$$V = \begin{pmatrix} 60 & 5 & 3 \\ 4 & 70 & 6 \\ 2 & 4 & 55 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 4 \\ 5 & 25 & 8 \\ 3 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zunächst die konsistente Endnachfrage $y = x - U\mathbf{1}$ (mit x = Spaltensummen von V). Berechnen Sie die güterbezogene Koeffizientenmatrix A_{ii} sowohl unter der Industrie-Technologie- als auch unter der Güter-Technologie-Annahme, und prüfen Sie in beiden Fällen die Rückrechnung $X = (I - A_{ii})^{-1} y$ gegen x.

Aufgabe

Aufgabe 3.4 (Reiter 5 — Vollständige Naturalwert-Verflechtungsbilanz)

Verwenden Sie erneut die Daten aus Aufgabe 3.1, diesmal mit $N_1 = \{G1, G2\}$, $N_2 = \{G3\}$. Bilden Sie Tabelle A (alle vier N_1-Zeilen vollständig, mit Restproduktionsspalten je Bereich) sowie Tabelle B (dieselben Zeilen über die Bereiche aggregiert, für Gut G1 und Gut G2). Prüfen Sie, dass die X-Werte in Tabelle B der Summe der beiden zugehörigen Bereichswerte aus Aufgabe 3.1 entsprechen. Berechnen Sie außerdem die Bereichszeile von Bereich 1 in der Spalte G1-B1 ($\text{Bereich}_k[j,l] = \sum_i p_{ik} X_{ijkl}$, Summe über *alle* Güter) mit $p_{ik} = 1$ und mit den Preisen aus Aufgabe 3.2.

A Lösungen

Schwierigkeitsgrad 1

Lösung

1.1: $X = 10 + 5 + 3 + 2 + 15 = 35$.

1.2: $a_{ijkl} = 12/60 = 0{,}20$.

1.3: M1: beide Merkmale auf beiden Seiten $(i, k \to j, l)$. M5: nur Gut auf beiden Seiten $(i \to j)$. M9: nur Bereich auf beiden Seiten $(k \to l)$. Alle drei sind quadratisch und eindeutig lösbar: M1 ist $(nm) \times (nm)$, M5 ist $n \times n$, M9 ist $m \times m$. Die übrigen sechs Modelle sind rechteckig.

1.4: $D = (50/60,\ 3/20,\ 2/10) = (0{,}8333,\ 0{,}15,\ 0{,}20)$.

1.5: Die Restproduktionsspalte fasst alle Lieferungen der N_1-Güter an die (nicht im Detail abgebildeten) N_2-Güter zusammen, getrennt nach dem empfangenden Bereich. Sie wird benötigt, damit Tabelle A trotz der Ausklammerung von N_2 bilanziell vollständig bleibt: Zeilensumme (innerhalb N_1) + Restproduktion + Y ergibt exakt die ursprüngliche Bruttoproduktion X.

Schwierigkeitsgrad 2

Lösung

2.1:

$$L = \begin{pmatrix} 1{,}2844 & 0{,}1835 \\ 0{,}2752 & 1{,}4679 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 143{,}12 \\ 144{,}95 \end{pmatrix}.$$

2.2: Zählermatrix (Summe über k; Zeilen G1, G2, Spalten G1-B1, G2-B1, G1-B2, G2-B2):

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 21 & 8 \\ 4 & 14 & 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

2.3: $Y^{*} = 50 + 6 + 4 = 60$.

2.4:

$$A_{ii} = B\,D = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}10 \\ 0{,}085 & 0{,}3425 \end{pmatrix}.$$

2.5: $\text{Restpro}_{ik,1} = 4 + 7 = 11$.

2.6: $a^{p}_{ijkl} = 0{,}20 \cdot 2/1{,}6 = 0{,}25$. Bei Lieferung aus Bereich k' mit $p_{ik'} = 1{,}6$: $a^{p}_{ijk'l} = a_{ijk'l} \cdot 1{,}6/1{,}6 = a_{ijk'l}$ — der wertmäßige Koeffizient entspricht dann dem mengenmäßigen. Dasselbe Gut wird also je nach lieferndem Bereich unterschiedlich bewertet.

Schwierigkeitsgrad 3

Lösung

3.1: Bruttoproduktion (Zeilensumme von Z plus Y):

$$X = (145,\ 159,\ 103,\ 132,\ 151,\ 143)^{\top}.$$

$a_{1111} = 15/145 = 0{,}1034$. Spektralradius $\rho(A) = 0{,}336$. Leontief-Inverse:

$$L = \begin{pmatrix} 1{,}1295 & 0{,}0906 & 0{,}0751 & 0{,}0940 & 0{,}0556 & 0{,}0384 \\ 0{,}0795 & 1{,}1601 & 0{,}0885 & 0{,}0582 & 0{,}0971 & 0{,}0320 \\ 0{,}0411 & 0{,}0340 & 1{,}1441 & 0{,}0313 & 0{,}0557 & 0{,}0693 \\ 0{,}0660 & 0{,}0585 & 0{,}0432 & 1{,}2503 & 0{,}1119 & 0{,}0503 \\ 0{,}0412 & 0{,}0815 & 0{,}0690 & 0{,}0910 & 1{,}2480 & 0{,}0690 \\ 0{,}0261 & 0{,}0417 & 0{,}0837 & 0{,}0412 & 0{,}0576 & 1{,}1541 \end{pmatrix}.$$

Die Rückrechnung $X = LY$ stimmt exakt mit obigem X überein.
3.2: Zeilen von $N_1 = \{G1, G3\}$: G1-B1, G3-B1, G1-B2, G3-B2. Lieferungen an N_2 sind die Spalten G2-B1 und G2-B2, z. B. G1-B1: $100 + 10 + 4 = 114$.

$$Y^* = (114,\ 78,\ 95,\ 114)^\top.$$

Wertmäßig (jede Zeile (i,k) mal p_{ik}: 1, 2, 1, 2,5):

$$Y^*_{\text{wert}} = (114,\ 156,\ 95,\ 285)^\top.$$

3.3: Konsistente Endnachfrage: $x = (66,\ 79,\ 64)$, $g = (68,\ 80,\ 61)$, $y = x - U\mathbf{1} = (41,\ 41,\ 37)$.

$$A_{ii}^{\text{Industrie}} = \begin{pmatrix} 0{,}2071 & 0{,}0837 & 0{,}0737 \\ 0{,}0898 & 0{,}2882 & 0{,}1454 \\ 0{,}0531 & 0{,}0637 & 0{,}2885 \end{pmatrix}, \qquad A_{ii}^{\text{Güter}} = \begin{pmatrix} 0{,}2415 & 0{,}0669 & 0{,}0591 \\ 0{,}0487 & 0{,}3442 & 0{,}1187 \\ 0{,}0299 & 0{,}0245 & 0{,}3608 \end{pmatrix}.$$

Beide Rückrechnungen $(I - A_{ii})^{-1} y$ ergeben exakt $x = (66,\ 79,\ 64)$.
3.4: Tabelle A (Zeilen G1-B1, G2-B1, G1-B2, G2-B2; Z-Spalten G1-B1, G2-B1, G1-B2, G2-B2):

Zeile	Z (4 Spalten)	Restpro. B1	Restpro. B2	Y	X
G1-B1	$15, 10, 8, 4$	5	3	100	145
G2-B1	$8, 20, 4, 9$	6	2	110	159
G1-B2	$6, 5, 25, 10$	2	4	80	132
G2-B2	$3, 8, 7, 28$	4	6	95	151

Tabelle B (über die Bereiche aggregiert):

Gut	Z (4 Spalten)	Restpro. B1	Restpro. B2	X
G1	$21, 15, 33, 14$	7	7	277 ($= 145 + 132$)
G2	$11, 28, 11, 37$	10	8	310 ($= 159 + 151$)

Die X-Werte in Tabelle B entsprechen exakt der Summe der jeweiligen Bereichswerte aus Aufgabe 3.1.
Bereichszeile Bereich 1, Spalte G1-B1 (Lieferungen von G1-B1, G2-B1, G3-B1): mit $p_{ik} = 1$: $15 + 8 + 4 = 27$; mit den Preisen aus Aufgabe 3.2: $1 \cdot 15 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 31$.

Literatur

P. Fleissner, W. Böhme, H.-U. Brautzsch, J. Höhne, J. Siassi, K. Stark: *Input-Output-Analyse. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen.* Springer-Verlag, Wien, New York 1993.